

## 企業価値モデルとシンセティックCDO定量分析手法

JCRでは、このたびシンセティックCDOの格付手法の見直しを行った。新手法では、企業価値モデルをベースとしたモンテカルロ・シミュレーションを行うことで、参照プールの信用力、ひいては、CDOのトランシェの格付けに応じた劣後金額を求める。本稿では、まず企業価値モデルについて述べ、それをもとにしてJCRのCDO分析モデルの特徴と定量分析方法を説明する。

### 1. 企業価値モデルとは

企業価値モデルとは、ある企業の時間  $t$  における資産価値  $A_t$  が幾何ブラウン運動とよばれる確率過程に従って変動していると仮定し、ある特定の時期  $T$  において  $A_T$  が企業の負債価値<sup>(注)</sup>  $L_T$  を下回ったときをデフォルトとみなすことにより当該企業の信用リスクを評価するモデルである。

企業価値が幾何ブラウン運動にしたがっているということは、 $A_t$  の瞬間的な増加率、すなわち瞬間資産収益率  $\frac{dA_t}{A_t}$  が、 $\mu, \sigma$  を定数として時間に比例する部分  $\mu \cdot dt$  とランダムな部分  $\sigma \cdot dW_t$  からなっていると考えていることになる。すなわち以下のような確率微分方程式を仮定していることになる。

$$\frac{dA_t}{A_t} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW_t$$

これを解くために、 $a_t = \log A_t$  と置いて伊藤の公式を適用すると次が成立する。

$$\begin{aligned} da_t &= \left\{ \frac{\partial(\log A_t)}{\partial A_t} \cdot \mu \cdot A_t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2(\log A_t)}{\partial A_t^2} \right\} \cdot dt + \frac{\partial(\log A_t)}{\partial A_t} \cdot \sigma \cdot A_t \cdot dW_t \\ &= \left( \mu - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \right) \cdot dt + \sigma \cdot dW_t \end{aligned}$$

これより、次のように  $a_t$  が求められる。

$$a_t = a_0 + \left( \mu - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \right) \cdot t + \sigma \cdot W_t$$

デフォルトの定義から  $A_t < L_T$  であるから、デフォルトとは次の不等式がなりたつことと同じである。

$$a_T = a_0 + \left( \mu - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \right) \cdot T + \sigma \cdot W_T < \log L_T$$

結局、 $W_T$  は平均0分散  $T$  の正規分布、 $a_0 = \log A_0$  であるので、 $Z = W_T / \sqrt{T}$ 、 $C = \frac{\log \frac{L_T}{A_0} - \left( \mu - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}$  とおくと、企業価値モデルにおけるデフォルトとは標準正規分布にしたがう確率変数  $Z$  がある定数の閾値  $C$  を下回るということ、すなわち次がなりたつことと考えることに他ならない。

$$Z < C$$

したがって、この企業の将来の時点  $T$  までにデフォルトする確率  $p$  は標準正規分布の分布関数を  $\Phi$  とすると次のように書けることになる。

(注) このモデルの説明における資産、負債とは理念的なものであり、現実の財務諸表の数値を意味しているものではない。一般の企業の債務超過によるデフォルト発生のメカニズムを捨象することによりモデルを設定しているにすぎない。

$$p = \text{Prob}(Z < C) = \Phi(C)$$

このことから、 $Z$ は企業価値を平均0、分散1にスケール調整した確率変数と考えることができる。

## 2. 企業価値モデルの代表例 (1ファクターモデル)

これまでは、デフォルト率の変動は1種類のブラウン運動から生じるとして説明してきた。すなわち1つの正規分布に従う確率変数による影響によりデフォルトが発生していると考えた。また、他の企業との関連も考慮しなかった。

実際のデフォルトの現象としては、景気が悪い時にはほとんどの業種で倒産が増加し、景気のよい時にはその逆になる傾向があることや、ある業種に集中して倒産が発生することなどが観測される。

つまり、企業のデフォルト事象は個々の会社の間では独立して発生するわけではないし、景気の変動についてデフォルトしやすい業種とそうでない業種がある。このような現象を企業価値モデルで表現するために、デフォルト事象に影響を与える共通要因を設定する方法をとることが普通である。

一番単純なモデルは、1ファクターモデルとよばれており、景気の影響を表す正規分布に従う確率変数と、企業特有の要因を表す正規分布に従う確率変数の和で企業価値を表現するものである。景気の影響をあらわす確率変数はすべての企業の企業価値を表す式に含まれ、業種によって景気の感応度が異なるように設定する。

具体的には、 $X$ を全企業のデフォルト率に影響を与える共通因子を表す確率変数、 $\epsilon$ を企業固有のデフォルトの要因を表す確率変数とし、 $a, b$ をそれぞれの要因の強さを表す係数として次のように設定する。なお $X$ と $\epsilon$ は互いに独立な平均0、分散1の正規分布にしたがうものとする。

$$Z = a \cdot X + b \cdot \epsilon$$

ここで $a$ は当該企業の属する業種の景気に関する感応度を表しており、景気を表象する確率変数 $X$ による影響の受け方の強さを表す。業種ごとに感応度を設定することを通じ、業種間のデフォルトの相関関係が間接的に反映されることになる。

2つの正規分布の和は再び正規分布になる性質(再生性)を用いて、 $Z$ を平均0、分散1にスケール調整すると、 $b$ は以下のように表せる。

$$b = \sqrt{1 - a^2}$$

したがって1ファクターのモデルは、次のように設定される。

$$Z = a \cdot X + \sqrt{1 - a^2} \cdot \epsilon$$

## 3. JCRのシンセティックCDO評価モデル

JCRではシンセティックCDOの格付けにおいて、2ファクターの企業価値モデルによる手法を採用することにした。

近年CDOの評価においてコピュラモデルが多く採用されるようになってきている。しかし、コピュラモデルは、コピュラの数学的性質により、最尤法などを用いプールごとに非線形的にパラメータを推計する必要があり、統計学の専門的知識がなければ活用は困難である。これに対し企業価値モデルは、プールの属性に対してパラメータを線形的に適用でき、シンプルでロバストである。したがって、専門家でない投資家やアレンジャーが配布ソフトウェアでモデルを利用する場合にも、問題が発生しにくいという利点がある。このような理論的安定性と実務の簡素さのバランスを考慮して、企業価値モデルを採用することにした。

1ファクターモデルは、バーゼルIIの信用リスク規制の理論根拠に採用されているように、銀行の与信プールなどの

多数の債務者からなる参照プールや十分に業種分散された参照プールではあまり問題が発生しない。シンセティックCDOの参照プールは銀行の与信プールなどに比較し規模が小さく、参照プールが社債の発行体などの場合には債務者の業種が偏る場合もあり、1ファクターモデルでは業種集中のリスクを十分に把握できない可能性がある。この点を補うため2つ目のファクターを導入することとした。

具体的には企業の資産価値を次のように設定した企業価値モデルを採用した。

$$Z = a \cdot X + \sqrt{1-a^2} \cdot b \cdot \varepsilon_1 + \sqrt{1-a^2} \cdot \sqrt{1-b^2} \cdot \varepsilon_2 \quad \dots (i)$$

ここで、 $X$ 、 $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$ は互いに独立で平均0、分散1の正規分布にしたがう確率変数である。 $X$ と $a$ は1ファクターモデルと同じ意味づけを与えられる。感応度 $a$ は業種ごとに設定した。

モデルの構築において、1ファクターモデルにおける企業固有のデフォルト要因を、企業の属する業種内環境に関する要因とそれ以外の要因に分解することとした。2番目のファクター $\varepsilon_1$ は前者の要因を表している。

$$\varepsilon = b \cdot \varepsilon_1 + \sqrt{1-b^2} \cdot \varepsilon_2 \quad \dots (ii)$$

$\varepsilon_1$ の係数 $b$ も業種ごとに設定されるが当該企業のデフォルト事象に影響を与える業種に共通する要因への感応度を表しており、この要因の影響を通じて業種内のデフォルトの相関関係が間接的に反映される。

#### 4. 第2のファクター導入の効果

第2ファクターの導入によって業種集中の影響が反映されることを簡単な例により説明したい。

いま、あるCDOの参照プールの債務者の業種が全部異なっている場合を考える。この場合には上式(ii)の構成から1ファクターモデルと同じ評価結果になることに注意する。

ここで、参照プールの2つの業種で第1ファクターの感応度 $a$ が同じだったとする。このうち一方の債務者を他方の業種の債務者に入れ替えた場合を考えると、1つの業種に2つの債務者が含まれ、第2ファクターの影響が反映される。この場合に、1ファクターの影響と比較するため残差項 $\varepsilon_2$ の係数に対するスケール調整の計算を行う（つまり1ファクターの場合に換算する）と次のようになる。

$$c = \sqrt{1 - (\sqrt{1-a^2} \cdot \sqrt{1-b^2})^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - a^2 \cdot b^2}$$

よって $0 < a, b < 1$ のとき $c^2 - a^2 = b^2 - a^2 \cdot b^2 = b^2 \cdot (1 - a^2) > 0$ となり $c > a$ がいええる。

つまり、1ファクターモデルに換算すると、業種がすべて異なっている場合に比べて第1ファクターの感応度を高く評価することになる。これは入れ替えた2債務者のデフォルト率変動の蓋然性を高めることになり、プール全体としても、分散している場合に比べ高いデフォルト感応度をもつプールと評価されることになる。

このように、第2のファクターの導入により、特定業種に債務者が集中する場合には保守的に参照プールを評価できるようなモデルを採用したが、その感応度 $b$ については、その業界のおかれた環境変化が著しいと判断される場合、ストレスをかけてより保守的に評価する必要もでてくる。たとえば、その業種で用いられる原材料の市況の長期的悪化が見込まれる場合や、その業界を規制している法律の改正によりデフォルトの不確実性が高まる見込みがある場合などが該当する。

このような状況に対応するため、第2ファクターのパラメータは、業種ごとにニュートラル水準またはアッパー水準の2つを個別に判断し使用することを想定している。

## 5. 定量分析手法概要

### (1) 入力に必要な情報

モンテカルロ・シミュレーションのモデルへの入力項目は、以下の通りである。

- 参照プールを構成する個別参照体の属性  
(評価開始日時点での格付け・想定デフォルト率・想定元本・業種)
- 回収率
- CDOの期間
- 第2ファクターの係数値

個別参照体の格付けは、JCRの格付先であればJCR格付けを付与する。JCR格付先以外の場合は、業界担当アナリストにより付与されたシャドウ格付け、他社格付けとのマッピングによる格付けなどを用いる。

デフォルト率は、JCRで使用している、各格付け・年限に応じたデフォルト率を参照し、割り当てる(表1参照)。想定デフォルト率表とは、JCRの格付け付与実績データ、デフォルト実績データから推計し、格付け・年限ごとにあらわした表である。

JCRでは、原則として従来の30種類の業種分類を利用する(表2参照)。個別参照体の業種は、このJCRのCDO業種分類にもとづき、割り当てる。

さらに、個別案件が組成された時点での、経済環境や、各参照体が属する業種環境などを加味して、第2ファクターにいずれの水準を採用するかを決定する。

### (2) シミュレーション方法

(1)の入力項目に加え、乱数を設定した上で、モンテカルロ・シミュレーションを行う。

企業のデフォルトは、モデルで計算される企業価値が、あらかじめ定められた閾値を下回ったときに発生するとみなされる。ここで、閾値とは、当該企業に付与されている格付けならびにCDOの期間から求められる想定デフォルト率を、標準正規分布の逆関数に代入した値をさす。

(i)式の第1項から第3項の確率変数に乱数を割り当てることで、個別参照体の企業価値が計算される。これを上記閾

表1 想定デフォルト率表

(単位：%)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
AAA	0.002	0.008	0.017	0.032	0.050	0.073	0.100	0.132	0.168	0.209
AA+	0.007	0.027	0.058	0.100	0.152	0.213	0.285	0.366	0.457	0.557
AA	0.019	0.065	0.133	0.221	0.327	0.451	0.591	0.747	0.918	1.104
AA-	0.035	0.110	0.213	0.341	0.490	0.659	0.847	1.052	1.274	1.512
A+	0.045	0.135	0.257	0.404	0.575	0.767	0.978	1.206	1.452	1.713
A	0.082	0.225	0.407	0.618	0.856	1.115	1.395	1.692	2.007	2.336
A-	0.127	0.324	0.561	0.827	1.118	1.428	1.757	2.102	2.461	2.833
BBB+	0.151	0.375	0.638	0.929	1.243	1.576	1.926	2.291	2.669	3.059
BBB	0.233	0.537	0.876	1.238	1.619	2.014	2.422	2.841	3.269	3.705
BBB-	0.642	1.386	2.167	2.971	3.789	4.617	5.450	6.288	7.127	7.966
BB+	0.957	2.011	3.095	4.192	5.295	6.399	7.501	8.598	9.689	10.772
BB	2.541	5.013	7.422	9.769	12.056	14.284	16.456	18.572	20.635	22.645
BB-	4.541	8.421	11.984	15.310	18.440	21.399	24.206	26.877	29.422	31.852
B+	5.713	10.340	14.490	18.296	21.825	25.121	28.214	31.125	33.874	36.476
B	10.077	17.185	23.186	28.447	33.146	37.392	41.259	44.801	48.061	51.072
B-	14.388	23.044	29.914	35.682	40.665	45.044	48.940	52.437	55.597	58.470
CCC	20.104	30.031	37.411	43.345	48.306	52.553	56.250	59.507	62.404	65.000
CC	30.284	43.224	52.133	58.862	64.188	68.529	72.139	75.187	77.792	80.038
C	40.196	58.130	69.420	77.108	82.568	86.554	89.522	91.765	93.482	94.809

値と比較することで、CDO終了時点でのデフォルトの発生有無が判定され、デフォルトと判断された場合には、あらかじめ設定した回収率を参照し、損失金額が計算される。参照プールを構成する全個別参照体の損失金額を合計することで、参照プール全体に発生した損失金額が計算される。試行は、想定デフォルト率などから勘案し十分な回数繰り返され、この試行結果を損失金額順にならべ集積したグラフ（リスクカーブ）の中で、CDOトランシェに設定されている劣後金額に対応するリスクカーブ上のパーセント点を求める。パーセント点の数値が、CDOの年限における想定デフォルト率表の中で、どの格付けに対応するかにより、トランシェの格付けを決定する。

〈ストラクチャード・ファイナンス部〉

表2 JCR CDO業種分類表

	JCR CDO用業種分類
1	農林・水産・鉱業
2	食料品
3	繊維
4	木製品・紙・パルプ
5	石油・化学
6	窯業・土石
7	鉄鋼
8	非鉄・金属
9	自動車・自動車部品
10	産業機械・工業機械・輸送用機械（自動車関連除く）
11	電機・精密機械・光学機械・事務用機械
12	医薬品・化粧品
13	その他製造業
14	土木・建設業
15	不動産業
16	鉄道
17	運輸業
18	印刷・出版業
19	通信・放送業
20	卸売業
21	小売業
22	飲食店
23	法人向けサービス業
24	個人向けサービス業
25	銀行
26	証券
27	生保・損保
28	ノンバンク
29	公益事業（電力・ガス・地方公益法人）
30	その他